

Problemas de límites, continuidad y derivabilidad

Calcula los siguientes límites de funciones racionales, irracionales y exponenciales

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2/x^2 + x/x^2}{x^2/x^2 - 3/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/x}{1 - 3/x^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3/x^3 + 5/x^3}{x^2/x^3 - x/x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 5/x^3}{1/x - 1/x^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^4 + 2x + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x/x^4 + 1/x^4}{x^4/x^4 + 2x/x^4 + \frac{2}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3} + 1/x^4}{1 + 2/x^3 + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 - 2}{2x^5 + x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5/x^5 - 2/x^5}{2x^5/x^5 + x^3/x^5 - \frac{1}{x^5}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2/x^5}{2 + 1/2 - \frac{1}{x^5}} = \frac{5}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x^2 + 7x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x/x^2 + 2/x^2}{x^2/x^2 + 7x/x^2 + \frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + 2/x^2}{1 + 7/x + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x + 3x^2} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2/x^2 + x/x^2 - 5/x^2}{x/x^2 + 3x^2/x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/x - 5/x^2}{1/x + 3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2}{\sqrt{(x^4 + 1)}} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4/x^4 - 2/x^4}{\sqrt{\left(\frac{x^4}{x^8} + \frac{1}{x^8}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2/x^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}\right)}} = \\
 &= \frac{1}{0} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{1 - x^2} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2} - 1} \\
 &= \frac{0}{-1} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(4x^3 - 1)}}{x + 2} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{4x^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)}}{x/x + 2/x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(4 - 1/x^2)}}{1 + 2/x} = \frac{2}{0} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x - 4}} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3/x^3 + 2x/x^3 - 1/x^3}}{\sqrt{x/x^3 - 4/x^3}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + 2/x^2 - 1/x^3}}{\sqrt{1/x^2 - 4/x^3}} = \frac{\sqrt{3}}{0} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x - 1}) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x - 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + x - 1})}{(x + \sqrt{x^2 + x - 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + x - 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 + x - 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x/x + 1/x}{x/x + \sqrt{x^2/x^2 + x/x^2 - 1/x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + 1/x}{1 + \sqrt{1 + 1/x - 1/x^2}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x + 2} - \frac{2x^3 + x + 1}{x} \right) &= \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty} = \text{Doble indeterminacion} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 - 1) \cdot x - (2x^3 + x + 1) \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x - 2x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x - x - 2}{x^2 - 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3/x^3 - x^2/x^3 - 4x/x^3 - 2/x^3}{x^2/x^3 - 2x/x^3} = \frac{-4}{0} = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - 3} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1}) &= \infty - \infty = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2 - 3} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1}) \cdot (\sqrt{2x^2 - 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \\
&\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2 - 3})^2 - (\sqrt{2x^2 - 2x + 1})^2}{\sqrt{2x^2 - 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3 - 2x^2 + 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \frac{\infty}{\infty} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 4/x}{\sqrt{2 - 3/x^2} + \sqrt{2 - 2/x + 1/x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 1}{2x + 3} - \frac{2x^3 + 5}{x} \right) = \infty - \infty \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^3 - 1) \cdot x - (2x^3 + 5) \cdot (2x + 3)}{(2x + 3) \cdot x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - x - 4x^4 - 6x^3 - 10x - 15}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 11x - 15}{2x^2 + 3x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 - 11/x^2 - 15/x^3}{2/x + 3/x^2} = \frac{-6}{0} = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} - \sqrt{x} \right) = \infty - \infty \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} - \sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1 - x}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^6} - \frac{2x^2}{x^6} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt{\frac{x}{x^6}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt{\frac{1}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 - 0 + 0}{\sqrt{0 - 0 + 0} + \sqrt{0}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{0} = \infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{2x^2 + 1} \right) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{2x^2 + 1})(x + \sqrt{2x^2 + 1})}{(x + \sqrt{2x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x^2 - 1}{x + \sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 1}{x + \sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \sqrt{\frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 0}{0 + \sqrt{0 + 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 2}{x + 3} - \frac{x^2 + 1}{x} \right) = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 - 2) \cdot x - (x^2 + 1)(x + 3)}{x(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 2x - x^3 - 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x - x^3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 3x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \infty - \infty = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-2}{\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right) &= \infty - \infty = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 2x) - (x^2 + 3)(x - 1)}{x^2 - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3}) = [\infty - \infty] =$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3})(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3})}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1})^2 - (\sqrt{x^2 - 3})^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1 - x^2 + 3}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3}} = \infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x^2+3} \times \frac{2x^3-2}{x} \right) = 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 4x - 2x^3 + 2}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^4}{x^4} - \frac{4x}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4} + \frac{3x}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-0-0+0}{0+0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2}{x^3+2} \cdot \frac{3x^2-1}{x+3} \right) = [0 \cdot \infty]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 4x^2 - 3x^2 + 1}{x^4 - 3x^3 - 2x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 7x^2 + 1}{x^4 - 3x^3 - 2x + 6} = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}}{x} = \frac{[\infty - \infty]}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1})}{x(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x-1})^2 - (\sqrt{2x+1})^2}{x\sqrt{2x-1} + x\sqrt{2x+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1-2x-1}{x\sqrt{2x-1} + x\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x\sqrt{2x-1} + x\sqrt{2x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 1}{2x^3 + 3x} \right)^{x^2-1} = [1^\infty] = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1) \cdot \left[\frac{2x^3 - x + 1}{2x^3 + 3x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1) \cdot \left(\frac{2x^3 - x + 1 - 2x^3 - 3x}{2x^3 + 3x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1)(1 - 4x)}{2x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x^3 - 1 + 4x}{2x^3 + 3x} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 1}{2x^3 + 3x} \right)^{x^2-1} = e^p = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 3} \right)^{2x^2 - 1} = [1^\infty] = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 1) \cdot \left[\frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 3} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 1) \cdot \left(\frac{4x^2 - 3 - 4x^2 - 3}{4x^2 + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 1)(-6)}{4x^2 + 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x^2 + 6}{4x^2 + 3} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 3}{4x^2 + 3} \right)^{x^2 - 1} = e^p = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - x} \right)^{4x + 1} = 1^\infty = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 1) \left[\frac{x^2 + 3}{x^2 - x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 1) \cdot \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x + 1) \cdot (3 + x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 13x + 3}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 13/x + 3/x^2}{1 - 1/x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - x} \right)^{4x + 1} = e^p = e^4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - 1} \right)^{3x^2 + 1} = 1^\infty = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) \cdot \left[\frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - 1} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 1) \cdot \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 + 1}{x^3 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 1) \cdot (2x^2 + 1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 5x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x^2 + 1/x^4}{1/x - 1/x^4} =$$

$$\frac{6}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - 1} \right)^{3x^2 + 1} = e^p = e^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{x^2} = 1^\infty = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left[\frac{3x + 1}{3x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left[\frac{3x + 1 - 3x}{3x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3/x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{x^2} = e^\infty = \infty$$

Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + \sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1/x}}{\sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

↑

Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x es decir por x.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{8 - 8}}{4 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}}{(x+2)(x-2)} ;$$

Descomponemos en factores el radicando y el denominador y luego simplificamos términos

$$x^3 - 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \ 0 \ 0 \ -8 \\ 2 & \quad 2 \ 4 \ 8 \\ \hline & 1 \ 2 \ 4 \ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 ; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \quad \cancel{=}$$

$$x^2 - 4 = 0 ; x = \pm 2 ; x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{1/2} \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{(x-2)^{1/2}(x+2)} = \frac{\sqrt{4 + 4 + 4}}{0 \cdot 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{0} = \infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^3 - 1} - \sqrt{x^3}) = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^3 - 1} - \sqrt{x^3})(\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3})}{\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\cancel{\sqrt{2x^3 - 1}})^2 - (\cancel{\sqrt{x^3}})^2}{\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1 - x^3}{\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3}}{\frac{\sqrt{2x^3 - 1} + \sqrt{x^3}}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/x^3}{\sqrt{2/x^3 - 1/x^6} + \sqrt{1/x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^3 + x^4}} = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 2}{\sqrt{\frac{x^3 + x^4}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}} = \frac{8}{\sqrt{1}} = 8$$

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x - 1}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4x - 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 4x - 1})^2}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x + 1}{x}}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4}{1 + 1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 31} - 3x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x + 31} - 3x) \cdot (\sqrt{4x^2 + x + 31} + 3x)}{\sqrt{4x^2 + x + 31} + 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 1})^2 - (3x)^2}{\sqrt{4x^2 + x + 31} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 31 - 9x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 31} + 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + x + 31}{\sqrt{4x^2 + x + 31} + 3x} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{x} + \frac{31}{x^2}}{\sqrt{\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{31}{x^4}} + \frac{3}{x}} = \frac{-5}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{16x^2 + 2}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - \sqrt{16x^2 + 2})(4x + \sqrt{16x^2 + 2})}{(4x + \sqrt{16x^2 + 2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x)^2 - (\sqrt{16x^2 + 2})^2}{4x + \sqrt{16x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^2 - 16x^2 - 2}{4x + \sqrt{16x^2 + 2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{4x + \sqrt{16x^2 + 2}} = \frac{-2}{\infty + \infty} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{5}} = \frac{-1+1}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x+1)(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x+4} - \sqrt{5})(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x+1)(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}{x+4-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x+1)(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)(\sqrt{x+4} + \sqrt{5})}{x-1} = -(\sqrt{5} + \sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x^2 + 3} &= \frac{\sqrt{\infty}}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x^2}}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^4}}}{x^2 + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1/x - 1/x^4}}{1 + 3/x^2} = \frac{\sqrt{0}}{1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6 - 9}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)} \cdot (\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 7x + 2} = \frac{3 \cdot 1/27 - 7 \cdot 1/9 + 5 \cdot 1/3 - 1}{3 \cdot 1/27 + 2 \cdot 1/9 - 7 \cdot 1/3 + 2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

• Factorización
 $3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -7 & 5 & -1 \\ 1/3 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 3(x-1)^2 \cdot (x-1/3)$$

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 2 & -7 & 2 \\ 1/3 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 3 & -6 & 0 \end{array} \rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 3(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-1/3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3(x-1)^2 \cdot \cancel{(x-1/3)}}{3\cancel{(x-1)} \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x-1/3)}} = \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1/3 - 1}{1/3 + 2} = \frac{-2/3}{7/3} = \frac{-2}{7}$$

$$d) \lim (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-3})^2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3 - (x-3)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \frac{6}{\infty + \infty} = \frac{6}{\infty} = 0 /$$

Calcular los siguientes limites

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2+x}{x-3} - \frac{x^2+2}{x-1} \right) = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+x) \cdot (x-1) - (x^2+2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 5x^2 + x^2 - x - x^3 + 3x^2 - 2x + 6}{x^2 - x - 3x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 6x^3}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{4}{0} = \infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+x) \cdot (x-1) - (x^2+2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-1)} = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-3x+2) \cdot (x+3) - x^2 \cdot 3x}{3x(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 2x + 6 - 3x^3}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 7x + 6}{3x^2 + 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{4x^2-2x+7}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(2x+1) - (4x^2-2x+7)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+2x-4x^2+2x-7}{2x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-7}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{7}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{4}{2} = 2$$

4)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2+1}{2x+4} - \frac{9x^2-5}{3x+6} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x^2+1)-(3x+6)-(9x^2-5) \cdot (2x+4)}{(2x+4) \cdot (3x+6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2+36x^2+3x+6-18x^3-36x^2+10x+20}{6x^2+12x+12x+24} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x+26}{6x^2+24x+24} = \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{13}{x} + \frac{26}{24}}{6 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}} = \frac{0}{6} = 0\end{aligned}$$

Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en dicho punto? Razona la respuesta.

b) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{PAU.}$$

a) Si $f(x)$ es continua en x_0 no implica que sea derivable en dicho punto ya que para que sea derivable es necesario que $f'(x)$ sea continua en x_0 .

b) ¿Continua en $x = 1$?

$$f(1) = -4 \cdot 1 + 5 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x^2 + 3) = -2 + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-4x + 5) = -4 + 5 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} l_1 = l_2 \quad \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1) \\ \text{continua en } x = 1 \end{array}$$

¿Derivable en $x = 1$?

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 1 \\ -4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-4) = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} l_1 = l_2 \quad \exists \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -4 = f'(1) \\ f'(x) \text{ continua en } x = 1 \rightarrow \\ \rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \end{array}$$

Contesta a las siguientes cuestiones:

1.- ¿En qué punto de la curva de ecuación $F(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ tiene una tangente horizontal?

2.- ¿Es posible que dicha curva tenga una tangente paralela a la recta $3x - 3y + 7 = 0$ en algún punto de la abscisa negativa?

1.- ¿ x_0 ?

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2} \rightarrow$$

$$f'(x_0) = 0; 16x_0 = 0; \quad \underline{x_0 = 0} \text{ tg horizontal}$$

2.-

$$-3y + 7 = 0; 3y = 3x + 7; y = x + \frac{7}{3} \rightarrow m_r = 1$$

$$m_t = m_r = 1 \rightarrow \frac{16x_0}{(x_0^2+4)^2} = 1; 16x_0 = (x_0^2 + 4)^2$$

¿ x_0 cuya tg sea paralela a la recta

Dada $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ 2 & x = -2 \\ 2x + 6, & x > -2 \end{cases}$ a) ¿ $f(x)$ es continua en toda la recta real? b) dibujar la grafica

$(-\infty, -2)$ $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \rightarrow (-\infty, -2) \text{CD}$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-\infty, -2) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -2)$

$$x = -2 \begin{cases} f(-2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} -\frac{1}{x+2} = \frac{-1}{0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 2x + 6 = 2 \end{cases} L_1 \neq L_2 = f(-2) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) \rightarrow$$

$f(x)$ es discontinua en $X = -2$ Discontinua no evitable de 2ª especie

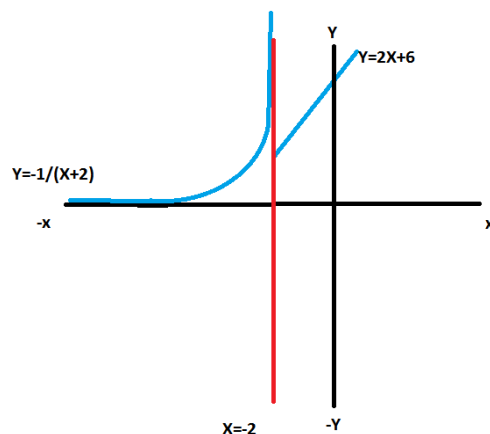
$(-2, \infty)$ $f(x) = 2x + 6$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty, \infty) \rightarrow (-2, \infty) \text{CD}$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-2, \infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-2, \infty)$

$(-\infty, -2)$ $y = -\frac{1}{x+2}$

X	Y
$-\infty$	0
-4	$\frac{1}{2}$
-3	1
-2	$\pm\infty$

$(-2, \infty)$ $y = 2x + 6$

X	Y
0	6
-2	2
2	10



Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x < -3 \\ 1 & -3 \leq x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & x \geq 0 \end{cases}$ ¿ $f(x)$ es continua en toda la recta real?

$(-\infty, -3)$ $f(x) = x^2 - 9$ Dominio: $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, -3) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-\infty, -3) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -3)$

$x = -3$ $\begin{cases} f(-3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} x^2 - 9 = 9 - 9 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^+} 1 = 1 \end{cases}$ $L1 \neq L2 = f(-3) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) \rightarrow$
 $f(x)$ es discontinua en $X = -3$. Discontinua no evitable de 1ª especie

$(-3, 0)$ $f(x) = 1$ Dominio: $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow (-3, 0) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-3, 0) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-3, 0)$

$x = 0$ $\begin{cases} f(0) = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (0)^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (0)^+} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$ $L1 \neq L2 = f(0) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow (0)} f(x) \rightarrow$

$f(x)$ es discontinua en $X=0$ Discontinua no evitable de 1ª especie

$(0, \infty)$ $f(x) = \frac{1}{x-1}$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ No $\subset D$

$f(x)$ es discontinua en $(-2, \infty)$ ya que en $X = 1$ $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{0} = \text{no está definido} \\ \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = +\infty \end{cases}$
 $\nexists \lim_{x \rightarrow (1)} f(x) \rightarrow$

$f(x)$ es discontinua en $x = 1$. Discontinua no evitable de 2ª especie

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Se pide:

- a) Hallar a y b para que la función sea continua en todo x real.
 b) Analizar su derivabilidad.
 c) Representar la gráfica.

- a) En $(-\infty, -1]$ $y = 0$ es f. constante \Rightarrow continua en R
 En $(-1, 2)$ $y = ax^3 + bx$ es f. polinómica $\forall a, b \Rightarrow$ continua en R
 En $(2, \infty)$ $y = 11x - 16$ es una recta continua en R

$$x = -1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^3 + bx) = -a - b \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow -a - b = 0$$

$$x = 2 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (11x - 16) = 22 - 16 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 + bx) = 8a + 2b \end{cases} \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow 8a + 2b = 6 \Rightarrow 4a + b = 3$$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 ; a = 1 \quad \text{y} \quad b = -a \Rightarrow b = -1$$

Para $a = 1$ y $b = -1$ la $f(x)$ es continua en R

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

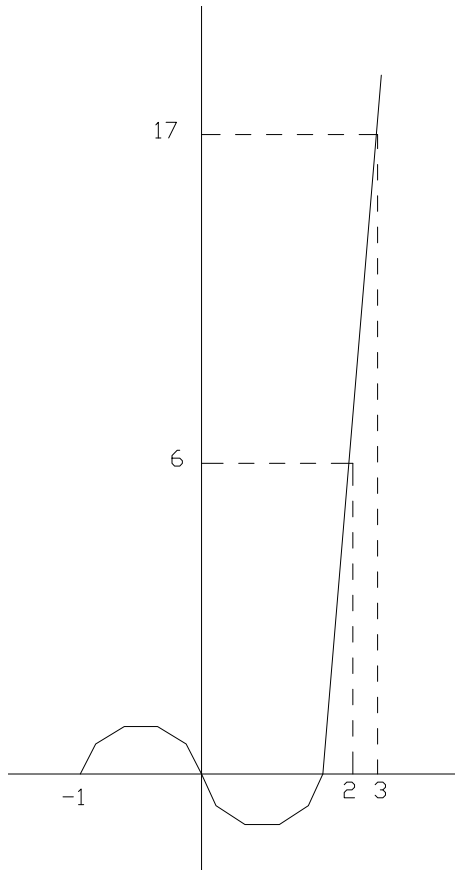
Las tres funciones $f'(x)$ en cada intervalo son continuas ya que dos son funciones continuas y la otra un polinomio de 2º grado.

$$\text{En } x = -1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 0 = 0 \end{cases} \quad l_1 \neq l_2 \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) \Rightarrow f'(x) \text{ no es continua} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable}$$

En $x = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 11 = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - 1) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11 \end{array} \right.$ $l_1 = l_2 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = f'(2) = 11$

$f'(x)$ es continua $\Rightarrow f(x)$ es derivable

c)



$$y = x^3 - x \quad y' = 3x^2 - 1; y' = 0; 3x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{max y min}$$

x	y
-1	0
0	0
1	0
2	6

$$y = 11x - 16$$

x	y
2	6
3	17

$$\text{Dada la función } f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \leq 0 \\ -ax + b & 0 < x \leq 1 \\ 5 & x > 1 \end{cases}$$

- a) Determinar a y b para que f(x) sea continua**
b) Para dichos valores estudiar su derivabilidad

Como las f(x) son $\forall a, b$ perteneciente a todo \mathbb{R} , funciones polinómicas de grado 1 o 0 podemos decir que f(x) es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$

$$f(0) = 0 - 3 = -3$$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 3) = -3 \end{array} \right. \quad b = -3 \text{ existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad f(x) \text{ es continua en } x=0$$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} f(1) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-ax + b) = -a + b \end{array} \right. \quad 5 = -a + b ; 5 = -a - 3 ; a = -8 \text{ existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad f(x) \text{ es continua en } x = 1$$

$$\text{si } f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \leq 0 \\ 8x - 3 & 0 < x \leq 1 \\ 5 & x > 1 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 8 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 8 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \end{array} \right. \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow f'(x) \text{ no es continua} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 8 = 8 \end{array} \right. \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow f'(x) \text{ no es continua} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 1$$

no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$

Derivar las siguientes funciones y calcular la ecuación de la recta tangente e ellas en el punto de abscisa $x = 0$

1) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x}$; $y_0 = e^0 = 1$ $y'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 0)$$

2) $f(x) = \ln(x + 2) \Rightarrow y' = \frac{1}{x + 2}$; $y_0 = \ln 2$ $y'(0) = \frac{1}{2}$

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2} (x - 0)$$

3) $f(x) = \frac{7}{x - 7} \Rightarrow y' = \frac{-7}{(x - 7)^2}$; $y_0 = -1$ $y'(0) = -1/7$

$$y + 1 = -\frac{1}{7} (x - 0)$$

4) $f(x) = e^x \cdot (x + 1) \Rightarrow y' = e^x \cdot (x + 1) + e^x = e^x \cdot (x + 2)$

$$y_0 = e^0 \cdot (0 + 1) = 1 \quad y'(0) = e^0 \cdot (0 + 2) = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$$y_0 = 0 \quad y'(0) = -1 \quad y - 0 = -1 \cdot (x - 0)$$

6) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 4)}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

$$y_0 = 4/0 \text{ No existe.}$$

Estudia la continuidad de las funciones :

a) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ b) $y = \frac{5x-5}{x^2-1}$

Para que sea continua , basta con que este definida.

a) El cociente esta definido en \mathbb{R} excepto las x que anulan el denominador, que en este caso es $x = -1$

La función será continua en $D = \mathbb{Y} x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

En $x = -1$ la $f(x)$ es discontinua de segunda especie por ser sus limites laterales $\pm \infty$

b) Aquí el dominio es \mathbb{R} excepto las x que hagan $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = \pm 1$

La $y = \frac{5x-5}{x^2-1}$ será continua en $D : \mathbb{Y} x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

En $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{-10}{0} = -\infty$ discontinua de segunda especie
 pues no existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

En $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{2}$

Discontinua evitable pues existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{2}$ pero $f(1) = \frac{0}{0}$ no esta definida

Estudia razonadamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

$x = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 2(2) - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \end{array} \right\}$ $L1 \neq L2 ; \text{ NO EXISTE } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 $f(x)$ no es continua en $x = 2$

$x = 4$ $\left\{ \begin{array}{l} f(4) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 1) = 7 \end{array} \right\}$ $L1 \neq L2 ; \text{ NO EXISTE } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
 $f(x)$ no es continua en $x = 4$

En $x \in (-\infty, 2)$ $y = x^2 + 1$ es continua por ser una paraboia.

En $x \in (2, 4)$ $y = 2x - 1$ es continua por ser una recta.

En $x \in (4, \infty)$ $y = 5$ es continua por ser una función constante.

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{array} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \rightarrow \quad \text{continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ y'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No coinciden las derivadas laterales} \\ \text{en } x = 0 \text{ luego la } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0 \\ \text{Aunque si sea continua en } x = 0 \end{array}$$

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 0 \\ \frac{2x \cdot (x-3)}{3x^2 - 9x} & \text{Si } 0 < x < 3 \\ 2/3 & \text{Si } x = 3 \end{cases}$$

Para que una función sea derivable es necesario que primero sea continua.

La función para todo x distinto de 0 y de 3 es continua por ser cociente de dos polinomios que solo se anulan en estos dos valores 0 y 3.

Estudiemos la continuidad en $x = 3$ calculando los límites laterales y $f(3)$.

$$f(3) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = f(3)$$

La función es continua en $x = 3$. Para ver si es derivable deberemos calcular su derivada y ver si es continua en $x = 3$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(4x-6) \cdot (3x^2-9x) - (2x^2-6x) \cdot (6x-9)}{(3x^2-9x)^2} = 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$f'(3) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = 0 = f'(3)$ Como la $f'(x)$ si es continua en $x = 3$ esto nos dice que la $f(x)$ si es derivable en $x = 3$

Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$, $f(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq f(0)$$

La $f(x)$ no es continua en $x = 0$, por lo que tampoco será derivable para $x = 0$.

Estudiar la continuidad de $f(x)$ en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x+1} & x \leq -1 \\ x^2 + 2 & x > -1 \end{cases}$$

$(-\infty, -1)$ $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow (-\infty, -1) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-\infty, -1) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = \frac{(-1)^2}{2(-2)+1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2}{2x+1} = -1 \quad L1 = L2 = f(-1) \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = -1 \rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 2 = -1 \end{array} \right.$$

$f(x)$ es continua en $x = -1$

$(-1, \infty)$ $f(x) = x^2 + 2$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, \infty) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-1, \infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, \infty)$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, -1)$ f. polinómica de grado 1 \rightarrow f(x) continua en R

$(-1, 1)$ f. constante \rightarrow f(x) continua en R

$(1, \infty)$ f. polinómica de grado 2 \rightarrow f(x) continua en R

$$\text{En } x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+5) = -3 + 5 = 2 \end{cases} \quad L_1 = L_2 \rightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

$$\text{En } x = 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = 1 - 3 + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los 3 intervalos la $f'(x)$ es continua en R por ser 2 f. continuas y una f. polinómica de grado 1 \rightarrow f(x) es derivable.

$$\text{En } x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 3 = 3 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$$

$f'(x)$ no es continua \rightarrow f(x) no es derivable

En $x = 1$ f(x) no es derivable por no ser continua

Estudiar las discontinuidades si existen de la f(x)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & -1 < x < 0 \\ 3x & x = -1 \\ x^2 - \frac{3}{2} & x < -1 \end{cases}$$

Los puntos conflictivos son: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2}x = -1/2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 3/2 = (-1)^2 - 3/2 = -1/2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 3/2 = (-1)^2 - 3/2 = -1/2 \quad l_1 = l_2$$

Los límites laterales coinciden luego como $f(-1) = -3$ la discontinuidad es evitable con solo definir el valor $-1/2$ para $x = -1$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}x = 1/0 = \infty \end{array} \right.$$

Falta un límite lateral al no existir luego hay una discontinuidad de 2º especie con salto infinito único pues $f(0) = 0$ coincide con el otro límite lateral.

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \end{array} \right.$$

Los límites laterales coinciden y además coinciden con $f(1) = 3$ luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

Halla a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para todo x real.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $y = x^2$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 2
 \rightarrow continua en $(-\infty, 1)$ C R.

$(1, \infty)$ $y = -x^2 + ax + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, f(x) es continua en R por ser una función polinómica de grado 2 \rightarrow continua en $(1, \infty)$ C R.

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + ax + b) = -1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + a + b = 1 \\ \underline{a + b = 2} \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $f'(x) = 2x$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 1
 \rightarrow continua en $(-\infty, 1)$ C R \rightarrow f(x) derivable en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ $f'(x) = -2x + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, f'(x) es continua en R por ser una función polinómica de grado 1 \rightarrow continua en $(1, \infty)$ C R \rightarrow f(x) derivable en $(1, \infty)$

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + a) = -2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 + a = 2 ; \underline{a = 4} \end{array} \right.$$

$$a + b = 2; \quad 4 + b = 2; \quad \underline{b = -2}$$

Hallar los valores de a y b para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$(-\infty, 0)$ $y = x^2 + 3$ es continua en \mathbb{R} por ser un polinomio de grado 2 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$

$(0, 2)$ $y = ax + b$ es continua en $\mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ por ser un polinomio de grado 1 o de grado 0 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 2)$

$(2, \infty)$ $y = x^3 - 1$ es continua en \mathbb{R} por ser un polinomio de grado 3 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(2, \infty)$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} f(0) = a \cdot 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 3 = 3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \\ \mathbf{b=3} \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 = f(0) \text{ es continua en } x = 0$$

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 1) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \quad 7 = 2a + 3; 4 = 2a : \mathbf{a = 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 = f(2) \text{ es continua en } x = 2 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica $y = \text{Ln } x$, en los puntos a) $x = 1$; b) $x = e$

La recta tangente es $y - y_0 = m_t (x - x_0)$

$$\text{a) } x_0 = 1 \quad y_0 = \text{Ln}1 = 0 \quad ; \quad m_t = y'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{tag : } y - 0 = 1 (x - 1) ; \quad x - 1 = 0 ; \quad x = 1$$

$$\text{b) } x_0 = e ; \quad y_0 = \text{Ln } e = 1 \quad ; \quad m_t = y'(e) = \frac{1}{e}$$

$$\text{tag : } y - 1 = \frac{1}{e} (x - e) \quad ; \quad y = \frac{1}{e} \cdot x - 1 + 1 ; \quad y = \frac{1}{e} \cdot x$$

$$\text{La } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \forall x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$$

Hallar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3) \cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = 6$$

Si obligo a que $f(3) = 6$ la $f(x)$ será continua, luego para $a = 6 \rightarrow$ mi $f(x)$ será continua $\forall x \in \mathbb{R}$

La función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax^2 - 2 & \text{si } x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua en \mathbb{R} . Hallar el valor de a

Si queremos que $f(x)$ sea continua en \mathbb{R} es necesario que :

En $(-\infty, 3)$ $y = x^3 - ax^2 - 2$ es continua $\forall a$ por ser función polinómica

En $(3, \infty)$ $y = x + 4$ es continua $\forall a$ por ser función polinómica

$$\text{En } x = 3 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} x + 4 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - ax^2 - 2) = 27 - 9a^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua } l_1 = l_2$$

$$\Rightarrow 7 = 27 - 9a^2 - 2; \quad 9a^2 = 18; \quad a^2 = 2; \quad a = \pm \sqrt{2}$$

Solo para $a = \pm \sqrt{2}$ podemos asegurar que $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , para los demás valores de a , los limites laterales de $f(x)$ en $x=3$ seran distintos y existiran discontinuidades de primera especie

Probar que la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo (1,2)

Si llamamos $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$, lo que nos esta pidiendo es que aseguremos que existe al menos un $x_0 \in (1,2)$ tal que $f(x_0) = 0$ es decir que $f(x)$ corte al eje OX en al menos un punto del intervalo.

Esto es la tesis del Teorema de Bolzano y para que se verifique, se deben cumplir las dos hipótesis del Teorema.

a) Que $f(x)$ sea continua en $[1,2]$.

Por ser $f(x)$ una función continua en \mathbb{R} ya que es una f.polinómica de grado 3, se puede asegurar que es continua en $[1,2] \subset \mathbb{R}$.

b) Que $\text{signo } f(b) \neq \text{signo } f(a)$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 4 = -2 < 0 \\ f(2) &= 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 4 = 10 > 0 \quad \text{signo } f(1) \neq \text{signo } f(2) \end{aligned}$$

Al verificar las hipótesis, Bolzano asegura que $f(x_0) = 0$ para al menos un $x_0 \in (1,2) \rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tiene al menos una raíz real en $(1,2)$.

$$\text{Sea la } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq -n/2 \\ m \sin x + n & \text{si } -n/2 < x < n/2 \\ 2 \cos x & \text{si } x \geq n/2 \end{cases}$$

Hallar m y n para que f(x) sea continua $\forall x \in R$

En $(-\infty, -n/2)$ $y = \sin x$ es continua por ser sinusoidal.

En $(-n/2, n/2)$ $y = m \sin x + n$ por ser suma de una sinusoidal y una constante, será continua $\forall m, n$.

En $(n/2, \infty)$ $y = \cos x$ es continua por ser función sinusoidal.

$$\text{En } x = -n/2 \begin{cases} f(-n/2) = \sin(-n/2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -n/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -n/2^+} (m \sin x + n) = m \sin(\frac{-n}{2}) + n = -m + n \\ \lim_{x \rightarrow -n/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -n/2^-} \sin x = \sin(-n/2) = -1 \end{cases}$$

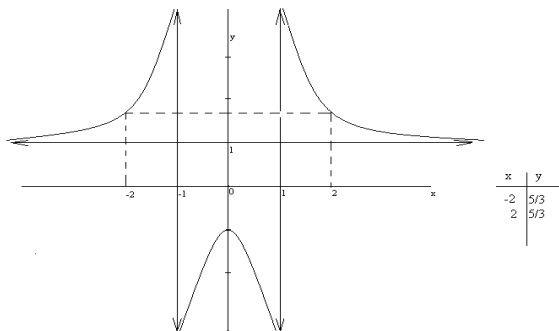
Para que sea continua $L_1 = L_2 = f(-n/2) \Rightarrow -m + n = -1$

$$\text{En } x = n/2 \begin{cases} f(n/2) = 2 \cos \frac{n}{2} = 2 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow n/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n/2^+} (2 \cos x) = 2 \cos \frac{n}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow n/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n/2^-} (m \sin x + n) = m \sin \frac{n}{2} + n = m + n \end{cases}$$

Para que sea continua $L_1 = L_2 = f(n/2) \Rightarrow 0 = m + n$

$$\begin{cases} -m + n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n = -1; & n = -\frac{1}{2} \\ m - \frac{1}{2} = 0; & m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{La función } f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -n/2 \\ \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} & -n/2 < x < n/2 \\ 2 \cos x & x \geq n/2 \end{cases} \quad \text{ES CONTINUA } \forall x \in R$$



Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

a) ¿Es continua? ¿En que puntos? Dibuja la grafica.

b) Comprueba que existe un punto $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$.
¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

De $[0, 2]$ $y = -x^2 + 1$ es continua por ser una parábola.

De $(2, 3]$ $y = x - 1$ es continua por ser una recta.

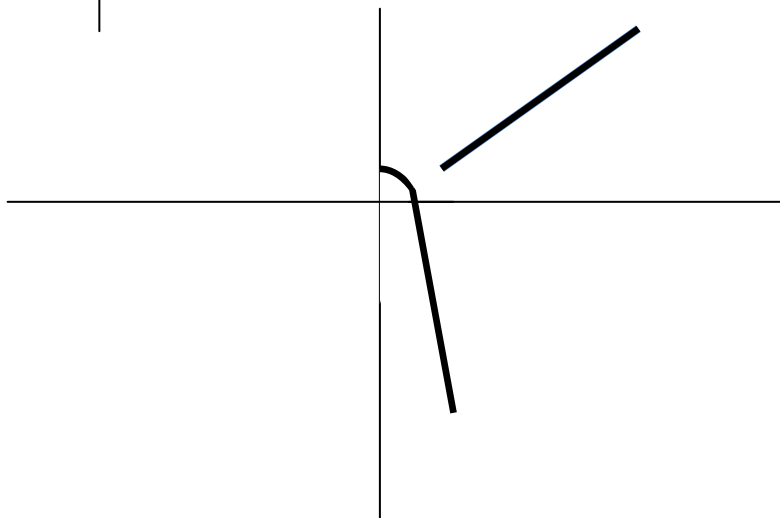
En $x = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = -2^2 + 1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 1) = -3 \end{array} \right\}$ $L1 \neq L2$; NO EXISTE $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $f(x)$ no es

$y = -x^2 + 1$

x	y
0	1
1	0
2	-3

$y = x - 1$

x	y
2	1
3	2



EXISTE $x = 1 \in [0, 3]$ / $f(1) = 0$, pero no se verifica Bolzano porque $f(x)$ no es

continua en $[0, 3]$ pues falla en $x = 2$ \implies no se puede asegurar que EXISTA

$x_0 \in (a, b)$ / $f(x_0) = 0$ pero no lo puede negar.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^3 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **Estudiar si es derivable en $x=1$.**
¿En qué puntos es derivable?
Hallar $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 1 \\ 9x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} 9x^2 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2) = -2 \end{array} \right\} L_1 \neq L_2 \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$$

La $f'(x)$ no es continua en $x = 1 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$

Si será derivable para $\forall x \in (-\infty, 1)$ donde $f'(x) = 2$ si es continua por ser constante.

También será derivable para $\forall x \in (1, \infty)$ donde $f'(x) = 9x^2$ si es continua por ser una función polinómica.

Se sabe que la función $f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

Es derivable en (0,5) y además verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a , b y c ?

Para que sea derivable, antes debe ser continua:

Continua en $x=2$

$$F(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } 0 \leq x \leq 2 & x = 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 < x \leq 5 & \lim_{x \rightarrow 2^+} c + \sqrt{x-1} = c + 1 \\ & & \lim_{x \rightarrow 2^-} bx^2 + ax = 4b + 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow c + 1 = 4b + 2a$$

Derivable en $x = 2$

$$F'(x) = \begin{cases} 2bx + a & \text{si } 0 \leq x \leq 2 & x = 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 < x \leq 5 & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \\ & & \lim_{x \rightarrow 2^-} 2bx + a = 4b + a \end{cases} \quad L_1 =$$

$$\Rightarrow 4b + a = \frac{1}{2}$$

Además $f(0) = f(5) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = b \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(5) = c + \sqrt{5-1} = c + 2 \end{cases}$

$$c + 2 = 0$$

$$c = -2$$

$$\begin{cases} -1 = 4b + 2a & \frac{3}{2} = a \\ \frac{1}{2} = 4b + a & b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Una función $f(x)$ viene definida de la siguiente manera :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 < x \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x - 1)^2 + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad \text{¿Es continua en } \mathbf{R}?$$

$(-\infty, 1)$ $y = x - 1$ es continua en \mathbf{R} por ser un polinomio de grado 1 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ $y = -x + 2x$ es continua en \mathbf{R} p $x \rightarrow 1$ por ser un polinomio de grado 2 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(1, \infty)$

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1/2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(x - 1)^2 + 1] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} l_1 \neq l_2 \text{ no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{array} \right.$$

Discontinua de 1ª especie con doble salto finito

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}, \text{ a) Representala gráficamente,}$$

b) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

a)

$$(-\infty, 0) ; y = x^2 + 2x$$

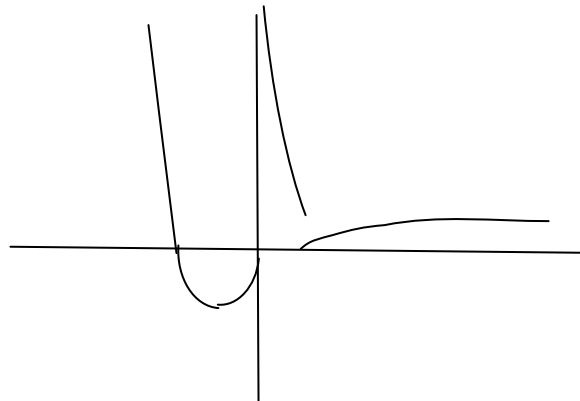
x	y
0	0
-1	-1
-2	0
-3	3

$$(0, 1) ; y = \frac{1}{x}$$

x	y
0	∞
$\frac{1}{2}$	2
1	1

$$(1, \infty) ; y = \ln x$$

x	y
1	0
2	0'67
.	.
∞	∞



b)

$$x = 0 \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0} = \infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$f(x)$ discontinua no evitable de 2ª especie

$$x = 1 \begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$f(x)$ discontinua no evitable de 1ª especie

$$\text{c) } f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{Como en } x = 0 \text{ y en } x = 1, \text{ la } f(x) \text{ no es}$$

continua, podemos asegurar que tampoco es derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x}{1-x^2}$, que es paralela a la recta $3x - 3y - 2 = 0$; b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = L(2x + 1)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$; c) calcular asíntotas y cortes con los ejes de $y = \frac{x}{1-x^2}$

a) $y = \frac{x}{1-x^2}$ Como la tangente es paralela a $3y = 3x - 2 \Rightarrow y = x - \frac{2}{3}$

$$m_r = 1 = m_t$$

$$y' = \frac{1-x^2 - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = m_t$$

$$\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = 1 ; x^2+1 = (1-x^2)^2 ; x^2+1 = 1-2x^2+x^4 ; x^4-3x^2=0$$

$$x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 ; x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 ; x_0 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hay tres tangentes $\begin{cases} y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \\ y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot (x - \sqrt{3}) \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot (x + \sqrt{3}) \end{cases}$

b) $y = L(2x + 1)$ en $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = L2$

$$y' = \frac{2}{2x+1} ; m_t = y' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y - L2 = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

c) Como $1-x^2 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$

$$AV: \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$AH: y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

AO: \nexists Asíntota oblicua, la $m = 0$

$$\text{Corte eje OX} \begin{cases} y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow x = 0 \text{ corte en } (0,0) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Corte eje OY} \begin{cases} y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow y = 0 \text{ corte en } (0,0) \\ x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x \leq 0 \\ ax + b & x > 0 \end{cases} \cdot \text{Hallar a y b para que sea derivable en } x = 0$$

$$x = 0 : \begin{cases} f'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (\text{sen } x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{cases} \quad L_1 = L_2 \quad b = 0 ; \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Es continua para $x = 0$

Escriba aquí la ecuación.

$$f(x) = \begin{cases} \text{Cos } x & x \leq 0 \\ a & x > 0 \end{cases}$$

$$x=0 \quad \begin{cases} f(0)=1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\text{cos } x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (a) = a \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1=L_2 \\ a=1 \end{matrix} \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \Rightarrow f'(0)$$

$f'(x)$ Es continua en $x=0$ y $f(x)$ derivable en $x=0$

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{Determina a y b para que sea derivable en } x=1$$

$$x=1 \quad \begin{cases} f(1) = 1 + b + 3 = b + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + 1) = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + bx + 3) = b + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1=L_2 \\ a+1 = b+4 \end{matrix} \quad \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow f(1) \quad f(x)$$

es continua en $x=1$

$(-\infty, 1)$ $f(x) = ax^2 + 1$ D: $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, 1)$ C D $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$
 $(1, \infty)$ $f(x) = x^2 + bx + 3$ D: $(-\infty, \infty)$; $(1, \infty)$ C D $f(x)$ es continua en $(1, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ 2x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $f(x) = 2ax$ D: $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, 1)$ C D $f(x)$ Esta definida y es continua en $(-\infty, 1)$
 $(1, \infty)$ $f(x) = 2x + b$ D: $(-\infty, \infty)$; $(1, \infty)$ C D $f(x)$ Esta definida y es continua en $(1, \infty)$

$$x=1 \quad \begin{cases} f(1) = 2 + b \\ \lim_{x \rightarrow 1} (2a) \\ \text{y } f(x) \text{ es} \end{cases} \quad L_1=L_2 \quad f(x) \text{ es continua}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2+b)^n \quad \left. \begin{array}{l} 2^a = 2+b \\ a+1 = b+4 \\ 2^a = 2+b \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a-b=3 \\ 2^a-b=2 \\ a-b=3 \\ 2a+b=-2 \\ a=1; a=1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 3 \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = f'(1) \\ 1-b=3; -b=2; b=-2 \end{array} \quad \text{derivable en } x=1$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ en el punto de abscisa 4 y ordenada positiva.

$$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0; 9y^2 = 4x^2 - 36; y^2 = \frac{4x^2 - 36}{9}; y = \sqrt{\frac{4x^2 - 36}{9}}$$

$$y_0 = \frac{64 - 36}{9} = \frac{\sqrt{32}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{9} \cdot 8x}{2\sqrt{\frac{4x^2 - 36}{9}}} = \frac{4x}{3\sqrt{4x^2 - 36}}$$

$$m = y'(4) = \frac{\frac{32}{9}}{2\sqrt{\frac{32}{9}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,94 \quad y - 1,88 = 0,94(x - 4)$$